

CAPÍTULO

8

Seqüências e
Séries

Objetivos Deste Capítulo

1. Definir seqüências e séries
2. Derivar as fórmulas para as séries de Maclaurin e Taylor
3. Construir aproximações de séries a partir das definições das séries de Maclaurin e Taylor
4. Usar os comandos do Maple para construir aproximações de séries para funções

Comandos do Maple Usados Neste Capítulo

`séries(arctan(x), x, 10)`; Este comando e o seguinte são os dois comandos principais deste capítulo. O comando *séries* expande uma função em torno de $x = 0$.

`taylor(cos(x), x = -Pi/2, 10)`; O comando *Taylor* expande uma função em torno de $x = a$ ao invés de 0.

`(D@@n)(p)(0)` A n -ésima derivada da função p , avaliada em 0.

`[S]`; Notação de lista. O objeto s é uma list.

`About(x)`; Encontrar informação a respeito da variável x .

`assume(x, real); additionally(x>1)`; O comando *assume* dá ao Maple informações sobre a variável, o comando *additionally* adiciona informação extra.

`assume(x, RealRange(0, open(1)))`; Outra maneira de dar informação ao Maple a respeito de uma variável. Especifica o domínio $0 \leq x \leq 1$.

`convert([S], list)`; Converte o objeto `s` para uma lista.

`convert([S], set)`; Converte o objeto `s` para um conjunto.

`eval(subs(x = 0, [seq(diff(sin(x), X$n), n = 1 .. 4])))`; Um exemplo de comandos previamente definidos usados todos de uma vez.

`Int(1/x^2, x = 1 .. infinity)` A forma inerte do comando `int`, onde o intervalo da integração é o infinito.

`limit(n!/n^n, n = infinity)`; Um limite no infinito.

`map(convert, L2, list)`; Aplica o processo `convert` em cada operando de `L2`, transformando cada um em uma lista.

`plot({pts}, style = point)`; O estilo do comando `plot` que produz pontos ao invés de uma linha suave.

`S2[10]`; Seleciona o 10º. elemento de uma list.

`seq(n^2, n = 1 .. 20)`; Forma uma seqüência de 20 quadrados.

`Sum(1/2^n, n = 1 .. infinity)`; `Sum(1/2^n, n = 1 .. infinity)`; A forma inerte do comando `sum`, onde o número de termos é infinito.

`unapply(t813a, x)`; Cria uma função de uma expressão.

`value(SP)`; Avalia `SP`, onde `SP` é uma `Int`, a `Diff`, ou alguma outra forma inerte de um comando.

Seqüências e Séries

A idéia de uma série, uma soma de termo, é importante pois é possível aproximar uma função usando um polinômio. Vamos aproximar a função $f(x)$ por um polinômio.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (8-1)$$

Se adicionarmos mais termos ao polinômio, escolhendo os coeficientes que nos interessam, a aproximação fica cada vez melhor. Isto nos leva à idéia que a correspondência entre a função $f(x)$ e o polinômio $pn(x)$ possa ser exata se adicionarmos um número infinito de termos.

Nós ainda não definimos o que significa a afirmação “adicionarmos um número infinito de termos,” já que um processo de adição passo a passo é claramente impossível. Para que a idéia faça sentido, teremos que começar com um conceito mais simples, o da seqüência infinita. Dando mais um passo para trás, vamos definir o que é seqüência infinita, para daí chegarmos a somas infinitas. Uma seqüência é melhor definida como uma função cujo domínio é constituído pelos inteiros positivos. Falando de forma menos informal, uma seqüência é qualquer listagem de números ordenados, assim como os quadrados dos números naturais, ou seus cubos, tirados em ordem. Desde que haja uma fórmula para a seqüência, existem um comando do Maple, chamado *seq*, para gerar os termos. Por exemplo, para gerar a seqüência de quadrados de 1 a 20, o comando é

```
S := seq(n^2, n = 1 .. 20);
```

```
S := 1, 4, 6, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400
```

Existem dois conceitos relacionados no Maple em relação a seqüências. Objetos como o acima são chamados de seqüências de expressão, e a mesma coisa entre colchetes é chamada de lista. Logo,

```
>[S];
```

```
[ 1, 4, 6, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400]
```

é uma lista. Seqüências e listas são quase a mesma coisa. As duas preservam a ordem de seus elementos. Por outro lado, um conjunto é uma coleção não ordenada de elementos. Se usarmos o comando *convert* para transformar S em uma lista e um conjunto, assim

```
>convert([S], list);
```

```
[ 1, 4, 6, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400]
```

```
>convert([S], set);
```

```
[ 1, 4, 6, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400]
```

parece que realizamos muito pouco. Agora observe a diferença quando escolhemos a seqüência $\cos((n\pi)/2)$:

```
>S1 := seq(cos(n*Pi/2), n = 0 .. 20);
```

```
S1 := 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1,
```

A lista é

>[S];

[1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1,]

Visto que o conjunto é

convert([S1], set);

{0, -1, 1}

Converter S1 para uma lista preserva a ordem da seqüência, e a lista retém todos os termos da seqüência. O conjunto é um objeto bem diferente. Ele contém apenas o elemento único 0, +1, e -1 . Logo, seqüências e listas são muito mais comunicáveis no Maple, mas nenhum tem uma relação próxima com um conjunto. Todos os três tem suas utilidades, e o comando *convert* permite que você use a estrutura de informação que você quiser.

Uma situação que requer a lista é o comando plot. Para produzir o plot de uma seqüência de quadrados, precisamos formar uma lista de pontos, então usar a opção do plot *style = point* para plotar os pontos ao invés de linhas. Aqui estão os comandos. (veja também Figura 8.1).

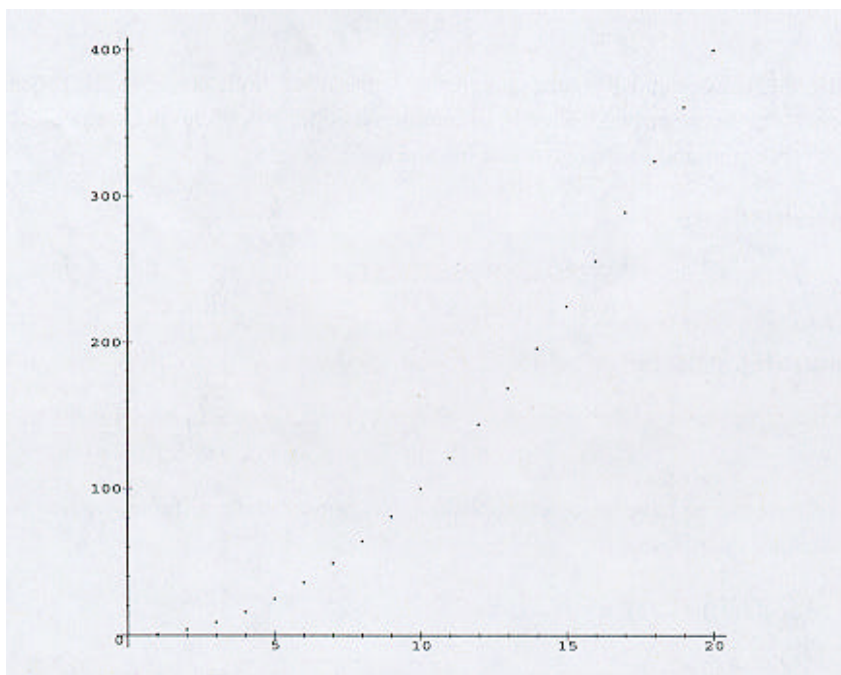


Figura 8.1 Plot gerado de uma lista de pontos.

```
>pts := seq([n, n^2], n = 0 .. 20);
```

```
pts := [0,0 ], [1, 1], [2, 4], [3, 9], [4, 16], [5, 25], [6, 36], [7, 49], [8, 64], [9, 81], [10, 100],  
[11, 121], [12, 144], [13, 169], [14, 196], [15, 225], [16, 256], [17, 289], [18, 324], [19,  
361], [20, 400]
```

```
>plot({pts}, style = point);
```

Veja que temos vários pontos a serem plotados, então é uma boa idéia por o nome *pts* entre chaves para denotar o conjunto de pontos.

Seqüências Infinitas

Uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$ (o conjunto de números naturais, que aqui pode incluir, as vezes, o 0) tem um valor para cada número inteiro, logo uma seqüência infinita de resultados. A seqüência infinita

$$f(0), f(1), f(2) \dots$$

é geralmente escrita $a_0, a_1, a_2, \dots$, em ordem para simplificar a notação. A idéia é que existe uma regra pela qual todo o número da seqüência pode ser determinado.

É fácil escolher o n -ésimo número da seqüência no Maple, vamos definir a seqüência S2:

```
>S2 := seq(n*(n^2-1)*(3*n+2)/24, n = 0 .. 20);
```

```
S2 := 0, 0, 2, 11, 35, 85, 175, 322, 546, 870, 1320, 1925, 2717, 3731, 5005, 6580, 8500,  
10812, 13566, 16815, 20615,
```

O 10º. número da seqüência S2 é

```
>S2[10];
```

870

Seqüências começam em S2[1] ao invés de S2[0]:

```
S2[0];
```

Error, invalid subscript selector

Para transformar uma seqüência em uma lista, simplesmente envolva-a em colchetes,

```
>L2 := [S2];
```

```
L2 := [0, 0, 2, 11, 35, 85, 175, 322, 546, 870, 1320, 1925, 2717, 3731, 5005, 6580, 8500,
10812, 13566, 16815, 20615]
```

E para transformar em uma lista de listas, use o comando *map*:

```
>LL2 := map(convert, S2, list);
```

```
LL2 := [[0], [0], [2], [11], [35], [85], [175], [322], [546], [870], [1320], [1925], [2717],
[3731], [5005], [6580], [8500], [10812], [13566], [16815], [20615]]
```

Veja que você tem que converter S2 para uma lista antes você possa transformá-la em uma lista de listas. O comando seguinte, que opera na seqüência S2, produz um erro:

```
>LL2 := map(convert, S2, list);
```

Error, wrong number (or type) of parameters in
function convert

Você pode fazer uma tentativa de plotar uma seqüência infinita. Após alguns ajustes à escala do eixo y, o seguinte comando

```
>plot(1/(10+n)+2, n = 0 .. infinity, y = 2 .. 2.1, style = point);
```

dá imagem do comportamento da função em seu domínio completo (Figura 8.2). Claro, não há como medir os pontos neste gráfico, mas, ainda indica que a seqüência tem valores próximos de 2 quando n cresce. (Perceba que a escala do eixo y é 2 até 2.1; logo, a base do eixo y está em 2.)

Seqüências podem ser definidas de expressões, funções e procedimentos. Um exemplo de uma seqüência construída de um procedimento é

```
>f := n->n*(n+1)*(2*n+1)/6;
```

$$f := n \rightarrow \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

```
>S3 := seq(f(n), n = 0 .. 15);
```

```
S3 := 0, 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, 650, 819, 1015, 1240
```

Os procedimentos do Maple podem ser tão complexos quanto você queira, porque você pode usar a linguagem de programação do Maple para construir procedimentos para tarefas específicas que você queira automatizar. Não entraremos no tópico de construir procedimentos personalizados neste livro, pois teríamos que entrar numa extensa lista de comandos e procedimentos. Como você já viu, existem

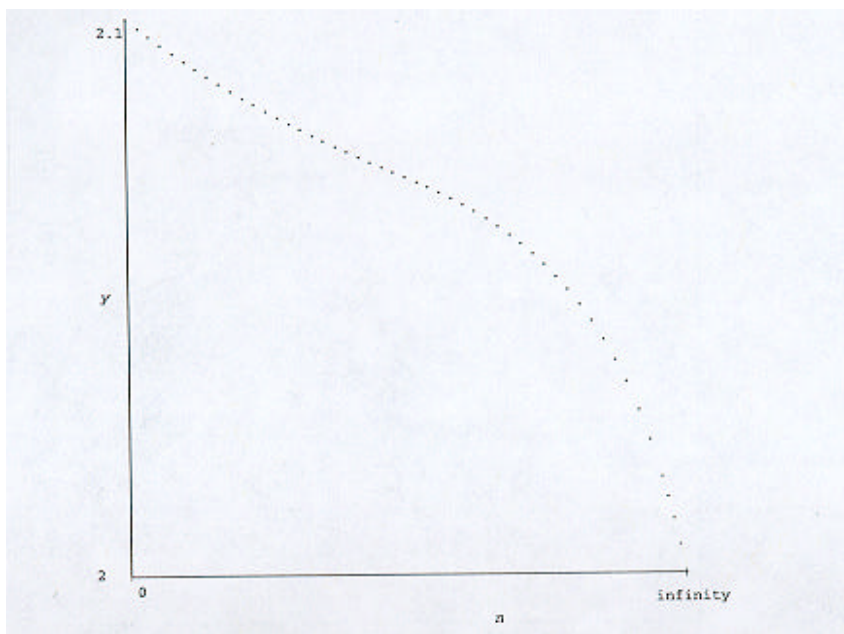


Figura 8.2

comandos do Maple para todas as operações elementares. No próximo capítulo, você verá que existe um comando do Maple até para resolver equações diferenciais.

As ferramentas para estudar seqüências são basicamente as mesmas que você usou anteriormente para estudar funções contínuas:

- (a) *Plotagem*: Usar a opção `style = point` pode ser mais instrutiva
- (b) *Limites*: Uma seqüência infinita tende a um limite se todos os termos exceto os primeiros permanecem próximos do ponto limite, o qual você olhando o gráfico que você plotou em (a). Chame este ponto limite de L . Você pode escolher algum número pequeno, como 10^{-100} , e todos os termos após o n -ésimo (você terá que calcular o valor de n) estarão dentro de 10^{-100} de L .

Exemplo 8-1

Examine a seqüência $a_n = n!/n^n$ para encontrar o limite quando n se aproxima do infinito.

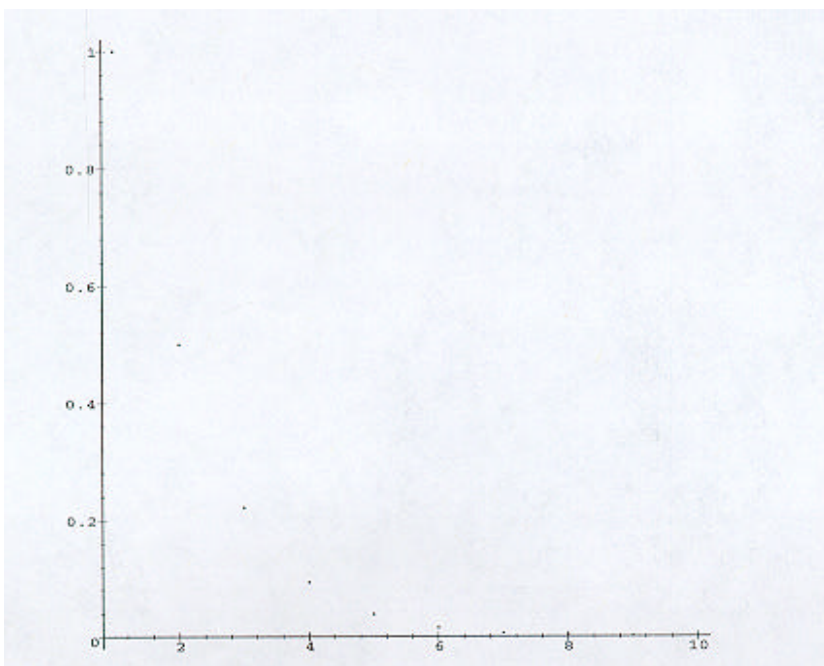


Figura 8.3 Inferindo o limite de $\frac{n!}{n^n}$ do gráfico dos pontos na sequência.

Resolução:

(a) Plote a sequência

```
>plot([seq([n, n!/n^n], n = 1 .. 10)], style = point);
```

A sequência é decrescente e os termos são todos positivos. Estes dois fatos mais a forma do gráfico sugerem que a sequência tem o limite zero (Figura 8.3). Para confirmar esta suposição, use o comando *limit*:

```
>limit(n!/n^n, n = infinity);
```

0

Sua vez. Ache o limite de

```
a[n] = a^(1/n), a>0;
```

$$a_n = a^{\left(\frac{1}{n}\right)}, 0 < a$$

Dica: Já que a é uma variável, você deve escolher valores representativos para ela antes de plotar a sequência. Tente plotar a sequência se $a = 0$ para ver porque. Depois, tente $a = 1/100$, depois $a = 100$. Finalmente aplique o comando `limit` do Maple.

>limit(a^(1/n), n = infinity);

1

Séries

A soma de uma sequência de números é chamada *série*. Existem dois tipos comuns de séries que trataremos primeiro.

Séries Aritméticas

A série

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots + (a+nd) = \sum_{k=0}^n (a+kd) \quad (8-2)$$

é chamada série aritmética. A soma desta série é facilmente achada após observarmos a soma dos números naturais $1+2+3+4+5+ \dots +n = \frac{n(n+1)}{2}$ Reorganizando os termos na equação 8-2 temos

$$S_n na + d \sum_{k=0}^n k = na + d \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2} \quad (8-3)$$

Para o Maple este resultado é fácil de derivar., apenas emita os comandos

>a1 := (sum(a+k*d, k = 0 .. n));

$$a1 := a(n+1) + \frac{1}{2}d(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1)d$$

a2 := simplify(a1);

$$a2 := an + a + \frac{1}{2}dn^2 + \frac{1}{2}dn$$

Talvez você queira expandir o lado direito da equação 8-3 para mostrar que se reduz a $a2$.

Séries Geométricas

Numa série geométrica cada termo é uma constante múltipla do termo que o precede. A forma geral de uma série geométrica é

$$g_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n = \sum_{k=0}^n ar^k \quad (8-4)$$

A soma g_n pode ser expressada em uma forma compacta, a qual é derivada multiplicando cada termo da série por r e subtraindo estes termos de g_n .

$$g_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$rg_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n + ar^{n+1}$$

$$g_n - rg_n = a - ar^{n+1}$$

$$g_n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{(1 - r)} \quad (8-5)$$

As fórmulas dos somatórios das séries aritméticas e séries geométricas deveriam já ser familiares do curso de pré – cálculo.

Séries Infinitas

A importância de seqüências infinitas está no fato de elas nos permitem dar sentido à idéia de uma soma infinita. Estes objetos são chamados de séries infinitas. Se pedirem para você somar a série infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots?$$

Você pode ficar tentado a responder, como Zeno o fez 2500 anos atrás, que não há resposta pois leva um tempo finito para cada soma e o número de somas pedido é infinito. Ignorando a objeção de Zeno por um momento, vamos plotar as somas infinitas.

```
>plot([seq([n, sum(2^(-r), r = 1 .. n)], n = 1 .. 10)], style = point);
```

Vemos que o limite parece ser 1 (Figura 8.4).

Agora vamos à objeção de Zeno: Descartemos a noção de tempo do problema definindo a soma de uma série infinita como o limite da seqüência de somas parciais quando n se aproxima do infinito. Não precisamos de nada além disto para expressar o que queremos dizer com soma de termos infinitos. A necessidade para seqüências infinitas está estabelecida: elas nos permitem definir o que significa uma soma infinita.

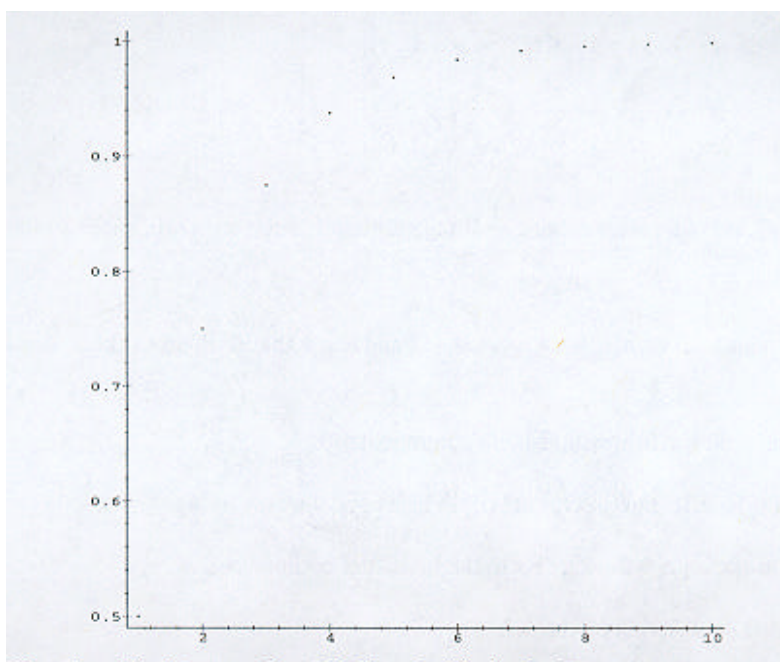


Figura 8.4 Aproximação gráfica do limite de uma soma.

Exemplo 8-2

Ache a soma da série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

Resolução: Nós já vimos que os pontos que representam a soma parcial parecem convergir para 1. Vamos deixar o Maple trabalhar a soma:

```
>Sum(1/2^n, n = 1 .. infinity) = sum(1/2^n, n = 1 .. infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Perceba o uso da forma inerte e o da letra minúscula do comando *sum*. Que permite a notação somatória e o resultado. Na verdade, você poderia fazer o Maple calcular a soma parcial para você. Copie o comando e substitua a palavra *infinity* por *r*.

>Sum(1/2^n, n = 1 .. r) = sum(1/2^n, n = 1 .. r);

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -2 \left(\frac{1}{2} \right)^{(r+1)} + 1$$

O somatório é 1, menos um termo contendo $\frac{1}{2^r}$. No limite, este ultimo termo é o, logo a soma até o infinito é realmente 1.

Sua vez. Ache o somatório de $1+x+x^2+x^3+?$ E demonstre que ele se torna infinitamente grande se $x \geq 1$.

Dica: Comece com os seguintes comandos do Maple;

>assume(x, RealRange(0, Open(1))); (Esta é uma maneira de dizer $0 \leq x < 1$)

>SP := Sum(x^n, n = 0 .. k); (A forma inerte do comando sum)

>S := value(SP); (avalia a soma)

>Limit(S, k = infinity) = limit(S, k = infinity); (Acha o limite da soma quando o número de termos vai para o infinito)

Resposta: _____

Exemplo 8-3: Convergência

Ache o somatório da série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ?$

Resolução: Os termos desta série tem o limite 0, então você pode ser levado à conclusão que os termos após um determinado número contribuem muito pouco. Mas, este não é o caso. Não importa o quão longe na série você vá, você sempre pode ter termos o bastante de forma que a soma acumulada seja aumentada em 1.

>SP := Sum(1/n, n = r .. k);

$$SP := \sum_{n=r}^k \left(\frac{1}{n} \right)$$

Digamos que r seja 100 e experimente achar o número de termos que são necessários para somar até um número maior que 1.

>value(subs(r = 100, k = 270, SP));

1.000110815

Sua vez. Quantos termos você precisa para chegar a um número maior que 1, começando com $a_{1,000} = 1/1000$? Use o Maple.

Resposta: _____

O exemplo 8-3 mostra não é o bastante que os termos na soma tenham limite em uma série infinita para ter uma soma finita. Não apenas isto, lembre-se que estas séries forma definida em termos de uma sequência infinita, e sequências são objetos ordenados. Veremos em breve que a ordem dos termos pode ser importante em algumas séries.

Re-arranjando os Termos

Considere a série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$? Definida por

>Sk := Sum ((-1)^(n+1)/n, n = 1 .. k);

$$S_k := \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$$

Formando a soma $1 + (-1/2 + 1/3) + (-1/4 + 1/5) \dots$, você vê que todos os termos após o primeiro são negativo, logo a soma tem que ser menor que 1. Mas escrevendo a soma da forma: $(1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) \dots$, todos os termos nos parênteses são positivos, logo a soma tem que ser maior que 0. Porém re-agrupando os termos em partes positivas e negativas, nós temos $1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \dots - (1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots)$. As duas séries são divergentes, resultam no infinito – infinito, um resultado sem sentido. Logo, a ordem na qual os termos estão posicionados neste caso é bem importante. Talvez por causa disto o Maple reluta em designar um valor para a soma:

>Limit(Sk, k = infinity);

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$$

>value(>Limit(Sk, k = infinity));

undefined

Todavia o Maple pode computar a resposta que estamos procurando se fizermos do problema uma soma infinita:

>Sk := Sum((-1)^(n+1)/n, n = 1 .. infinity);

$$SK := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$$

>value(Sk);

Se os termos forem somados na ordem especificada por n , sem serem re-arranjados, a série converge para $\ln(2)$. Estas séries são chamadas condicionalmente de convergentes. Séries condicionalmente convergentes devem ser tratadas com extrema atenção. Poderíamos provar isto num curso avançado de cálculo re-arranjando os termos em uma série condicionalmente convergente, a série re-arranjada pode ser conduzida a convergir para qualquer número que você queira!

Em contraste, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente.

Qualquer série convergente que consista apenas de termos positivos é *absolutamente convergente*. Já que para que a série convirja não é o bastante que os termos individuais se aproximem de zero, testes de convergência devem ser realizados. Listaremos alguns destes testes aqui.

Testes de Convergência

Um teste de comparação: Digamos que para as seqüências a_n e b_n , $0 \leq a_n$, e $a_n \leq b_n$ para todos n . Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ também.

Segundo teste de comparação: Se $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, e se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ e $c \neq 0$, então

$\sum a_n$ converge se, somente se, $\sum b_n$ convergir.

Teste de Razão: Se a seqüência a_n consiste em todos os termos positivos, então forme o

limite da razão $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$. Se $r < 1$, então $\sum a_n$ converge, visto que diverge se $r > 1$.

Se $r = 1$ o teste é inconclusivo: a série pode convergir ou divergir.

O teste integral: A Se a seqüência a_n foi definida como os valores de $f(x)$, onde n é um número inteiro. Se for possível transformar $f(n)$ em uma função da variável x realmente

avaliada, de forma que $f(x) = f(n)$ quando $x = n$, então $\sum a_n$ converge se, somente se, $\int_1^{\infty} f(x)dx$ existir.

Exemplo 8-4

Demonstre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente pelo teste integral.

Resolução: A função contínua correspondente a $\frac{1}{n^2}$ se $f(x) = \frac{1}{x^2}$. A integral desta função é

>Int(1/x^2, x = 1 .. infinity) = int(1/x^2, x = 1 .. infinity);

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

A integral existe (é infinita), então a série correspondente deve ser convergente. O valor da série infinita também é 1? É fácil de descobrir avaliando a soma diretamente.

>S := sum(1/x^2, x = 1 .. infinity); evalf(S);

$$S := \frac{1}{6} \pi^2$$

1.644934068

A soma da série é um pouco mais do que 1, e surpreendentemente, envolve o número π . A prova do resultado do Maple está além do alcance deste teste.

Sua vez.

(a) Demonstre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ é convergente usando o teste integral, e então ache a sua soma.

Resposta: _____

(b) Compare os valores da integral e da soma. *Dica:* No caso da soma, você pode ter que converter para a forma decimal para interpreta-la.

Resposta: _____

(c) A soma é maior do que a integral. Mostre por que graficamente, usando o comando *leftbox*.

Resposta: _____

Exemplo 8-5

Diga quando $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente.

Resolução: Pelo teste integral,

>Int(1/x^p, x = 1 .. infinity) = int(1/x^p, x = 1 .. infinity);

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x^{(-p+1)}}{p-1} + \frac{1}{p-1}$$

O termo $-\frac{x^{(-p+1)}}{p-1}$ dá a dica que precisamos. Quando x cresce, p tem que ser maior que 1 de forma que todo o termo tenderá a zero.

>assume(p>1);

>limit(-1/(p-1)*x^(-p+1)+1/(p-1), x = infinity);

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x^{(-p+1)}}{p-1} + \frac{1}{p-1}$$

Porque não estamos conseguindo a resposta que esperamos? Vamos tentar por mais restrições a x :

>assume(x, real); additionally(x>1);

>limit(-1/(p-1)*x^(-p+1)+1/(p-1), x = infinity);

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x^{(-p+1)}}{p-1} + \frac{1}{p-1}$$

>limit(-1/(p-1)*x^(-p+1), x = infinity);

```

lim - x~(-p~+1)
p~ -1
x~ -> infinity
>10000000^(-.03);

.6165950019
>about(x); about(p);

```

Originally x, renamed x~:
 Is assumed to be: RealRange (Open(1), infinity)
 Originally p, renamed p~:
 Is assumed to be: RealRange (Open(1), infinity)

Nenhuma de nossas abordagens, além da primeira parece funcionar. Aqui tivemos que trabalhar sem a ajuda do Maple, observando que p deve ser maior que 1.

O teste da Raiz: Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n \right|^{\left(\frac{1}{n} \right)} = l$ e $l < 1$ então $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Se $l > 1$, a série diverge, e se $l = 1$, a série pode tanto convergir como divergir.

Exemplo 8-6

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ aplicando o teste da raiz.

Resolução: Se $x = 1$, então $\left(x^n \right)^{\left(\frac{1}{n} \right)} = 1$ para qualquer n, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x^n \right)^{\left(\frac{1}{n} \right)} = x$. Logo, a série diverge.

Usando o Maple para verificar que $\left(x^n \right)^{\left(\frac{1}{n} \right)} = x$

```
>limit((1^n)^(1/n), n = infinity);
```

1

Se $x \neq 1$

```
>limit((x^n)^(1/n), n = infinity);
```

x

Logo a série converge se $x < 1$ e diverge se $x \geq 1$.

Sua vez. Usando o teste da raiz, demonstre que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^{(2n+1)}}$ converge se $x > 1$.

Resposta: _____

Expansão de Funções em Forma de Série

Há varias situações onde é vantajoso definir uma função que é definida por uma fórmula complicada como uma aproximação polinomial. Desde que a função não tenha muitas complicações em torno do intervalo de interesse, ela pode ser aproximada por um polinômio de baixa ordem. Você pode entender a possibilidade disto acontecer observando se a função parece com uma linha reta, ela pode ser aproximada por um polinômio linear; se parece com uma parábola, pode ser aproximada por uma quadrático; e assim por diante. A medida em que o grau de aproximação polinomial cresce, também cresce o número de mudanças na curvatura que pode ser aproximado. Começaremos a discussão aproximando uma função próxima a $x = 0$.

Série de Maclaurin. Que a série de potência seja dada pelo polinômio cujos primeiros nove termos sejam dados por

```
>p := x>a[0] + a[1]*x + a[2]*x^2 + a[3]*x^3 + a[4]*x^4 + a[5]*x^5 + a[6]*x^6 +
a[7]*x^7 + a[8]*x^8;
```

$$p := x \rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8$$

O valor do polinômio p em $x = 0$ é $p(0) = a_0$. Ou seja, o valor da função em $x = 0$ é dado por um coeficiente constante, a_0 . a função e sua aproximação da série de potência coincidem a $x = 0$. Agora tire a derivada da série e avalie em $x = 0$.

```
>D(p)(0);
```

a_1

Similarmente as derivadas seguintes da série são:

```
>(D@@2)(p)(0);
```

2^a_2

```
>(D@@3)(p)(0);
```

6^a_3

```
>(D@@4)(p)(0);
```

$$24^a_4$$

>(D@@5)(p)(0);

$$120^a_5$$

Enquanto o Maple não dá a enésima derivada geral, é fácil ver, trabalhando os primeiros termos à mão, deve ser

>(D@@n)(p)(0) = n!*a[n];

$$(D^{(n)})(p)(0) = n! a_n$$

Resolvendo para o coeficiente a_n , achamos

>a[n] = (D@@n)(p)(0)/n!;

$$a_n = \frac{(D^{(n)})(p)(0)}{n!}$$

Podemos argumentar que, já que a série bate com a função em $x = 0$ pela nossa escolha de a_0 , a melhor escolha para a_1 , e na verdade para todos os outros termos, deve ser dada pela última equação. Logo, a regra: para achar os coeficientes da série de potência, ache as enésimas derivadas da função que você está tentando aproximar, avalie os resultados em $x = 0$, e divida por $n!$. Esta série se encaixa melhor com a função perto de $x = 0$, pois aí, não apenas a função e a série têm o mesmo valor mas, a primeira derivada é a mesma e assim por diante. Logo, se conseguirmos computar as várias derivadas da função dada, podemos determinar os seus correspondentes na série. Quantos coeficientes precisamos computar? Obviamente, quanto mais coeficientes mais possível é ter uma boa correspondência entre a função e a série para valores de x cada vez mais além de $x = 0$.

Exemplo 8-7

Compute os coeficientes na série de potência para e^x

Resolução: Já que

>Diff(exp(x), x\$n) = exp(x);

$$\text{Diff}(\exp(x), x\$n) = e^x$$

E $e^0 = 1$, temos $a_n = \frac{1}{n!}$. Logo,

>exp(x) = Sum(x^n/n!, n = 0 .. infinity);

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Sua vez. Compare e^2 com a aproximação da série de potência $1 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \dots$

(a) Quantos termos você precisa para uma aproximação de quatro casas?

Resposta: _____

(b) Quantos termos você precisa se $x = 0.003$?

Exemplo 8-8

Ache a expansão da série de potência para $\sin(x)$.

Resolução: As quatro derivadas distintas de $\sin(x)$ são

```
>eval(subs(x = 0, [seq(diff(sin(x), x$n), n = 1 .. 4)]));
```

[1, 0, -1, 0]

Depois da qual o ciclo começa novamente:

```
>eval(subs(x = 0, [seq(diff(sin(x), x$n), n = 5 .. 8)]));
```

[1, 0, -1, 0]

Logo a expansão da série de potência para $\sin(x)$ é

```
>sin(x) = Sum((-1)^(n+1)*x^(2*n+1)/(2*n+1)!, n = 0 .. infinity);
```

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Os primeiros termos são

```
>expand(sum((-1)^(n+1)*x^(2*n+1)/(2*n+1)!, n = 0 .. 10);
```

$$-x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 - \frac{1}{362880}x^9 + \frac{1}{39916800}x^{11} - \frac{1}{6227020800}x^{13} + \frac{1}{1307674368000}x^{15} \\ - \frac{1}{355687428096000}x^{17} + \frac{1}{121645100408832000}x^{19} - \frac{1}{51090942171709440000}x^{21}$$

Sua vez. Estime o seno de 30 graus usando termos da série de potência até x^9 . Compare a sua resposta com a resposta exata de 1.2. Qual é porcentagem de erro? (Lembre-se de converter 30° para radianos!)

Resposta: _____

Exemplo 8-9

Ache a expansão da série de potência para $\ln(1+x)$.

Resolução: A forma $(1+x)$ é usada ao invés de x já que podemos escolher $x = 0$ e ainda ter $\ln(1+x)$ definido. Lembre-se: $\ln(0)$ é indefinido, mas, $\ln(1) = 0$, que é um número perfeitamente respeitável.

As primeiras 10 derivadas de $\ln(x+1)$ em $x = 0$ are

>subs(x = 0, [seq(diff(log(1+x), x\$n,)/n!, n = 1 .. 10)]);

$$\left[1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{10}\right]$$

$$\text{Logo, } \ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \dots?$$

Sua vez. Compute $\ln(e)$ usando a expansão da série de potência para e^x . Compare sua resposta com $\ln(e) = 1$. Dê o número de termos usados na expansão e a porcentagem de erro da aproximação.

Resposta: Número de termos: _____; porcentagem de erro: _____

Pelo fato da série de potência ser tão útil para aproximar funções, o Maple tem um comando para a sua construção. O comando *séries* calcula os primeiros termos polinomiais de qualquer combinação de funções padrão.

Exemplo 8-10

Calcule os primeiros termos de $\arctan(x)$ usando o comando *séries*.

Resolução: Já que $\arctan$ é uma das funções conhecidas pelo Maple, tudo que tem a fazer é formular o comando *séries*, dando a função $\arctan$ e especificando o número de termos.

>séries(arctan(x), x, 10);

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + O(x^{10})$$

O terceiro parâmetro, 10, especifica o número de termos que você quer, enquanto o segundo parâmetro especifica a variável para a expansão. No caso de haver outros parâmetros.

Sua vez. Forneça o comando que acha os primeiros sete termos de $\cos(x)$.

Resposta: _____

Série de Taylor

A expansão de uma função não precisa começar em $x = 0$. Algum outro valor pode ser tomado como ponto de partida para a expansão. Desta vez vamos aceitar que a função pode ser aproximada por um polinômio de forma

$$p(x) = a[0] + a[1]*(x-a) + a[2]*(x-a)^2 + a[3]*(x-a)^3 + a[4]*(x-a)^4;$$

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4$$

Não é muito difícil demonstrar que o k -ésimo coeficiente, a_k , é dado por

$$a_k = \frac{D^{(k)}(p)(a)}{k!} \quad (8-6)$$

onde $D^{(k)}(p)(a)$ representa a k -ésima derivada de p , avaliada em a . Para ilustrar esta fórmula, a usaremos para a expansão da série da função de logaritmo natural do Exemplo 8-8.

Exemplo 8-11

Ache a expansão de $\ln(x)$ em $x = 1$ por cálculo direto. Veja que isto é equivalente a achar a expansão de $\ln(1+x)$ em $x = 0$.

Resolução: Primeiro identifique o parâmetro a na expansão anterior de $p(x)$. Já que a expansão deve ser em torno de $x = 1$, então o parâmetro $a = 1$. Depois, compute as derivadas, como fixemos no exemplo 8-8, usando a fórmula 8-2.

$$>\text{subs}(x = 1, [\text{seq}(\text{diff}(\log(x), x\$n)/n!, n = 1 .. 10)]);$$

$$\left[1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{10}\right]$$

A lista de coeficientes é a mesma pois estamos usando basicamente o mesmo comando. Desta vez, porém, nós multiplicamos os coeficientes pela potencia apropriada de $(x-1)$.

$$\ln(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \dots \quad (8-7)$$

Sua vez. Calcule $\ln(1)$ usando a fórmula 8-7. A resposta é exata?

Resposta: _____

Quando a série de potência é obtida expandindo em torno de algum valor diferente de 0, é chamada de série de Taylor. O comando do Maple é $Taylor(f(x), x = a, n)$, onde $f(x)$ é a função (escrita em forma de expressão) a qual necessita da série de Taylor, a é o valor em torno do qual a expansão acontece, e n é o número de termos desejados.

Exemplo 8-12

Ache a expansão de Taylor de $\cos(x)$ em torno de $x = -\pi/2$ e compare à série de potência para $\sin(x)$ em torno de $x = 0$.

Resolução: O comando do Maple para a série de Taylor para $\cos(x)$ em torno de $x = -\pi/2$ é

>ex812 := taylor(cos(x), x = -Pi/2, 10);

$$\begin{aligned} \text{ex812} := & x + \frac{1}{2}p - \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{2}p\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + \frac{1}{2}p\right)^5 - \\ & \frac{1}{5040}\left(x + \frac{1}{2}p\right)^7 + \frac{1}{362880}\left(x + \frac{1}{2}p\right)^9 + O\left(\left(x + \frac{1}{2}p\right)^{10}\right) \end{aligned}$$

Você sabe que o cosseno é uma função par, mas, os termos em ex812 todos têm potências ímpares. Se elevarmos o eixo y para $-\pi/2$ pela seguinte substituição:

>ex812 := subs(x = -Pi/2, ex812);

$$\text{ex812} := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

e compararmos com a expansão da série de $\sin(x)$,

>séries(sin(x), x, 10);

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

vemos que as expressões são idênticas. Já que existe uma conhecida afirmação trigonométrica que diz que $\cos(x-\pi/2) = \sin(x)$, não deveríamos ficar surpresos que as duas expressões acabam por ser idênticas. Outra maneira de ver este resultado é pensar em empurrar a curva cosseno uma distância de $\pi/2$ para a direita, onde se torna a curva seno.

Sua vez. Até polinômios podem ser aproximados por polinômios. Você pode aproximar um polinômio do 11º. grau com um polinômio de uma graduação menor.

(a) Use o Maple para encontrar a série de Taylor do 5º. grau de

>ex812yt := x+x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^11;
em torno de $x = 1$.

Resposta:_____

(b)Qual a precisão da aproximação quando $x = 1.05000$?

Resposta:_____

Quando os comando *séries* ou *taylor* são usados, o Maple responde com um polinômio e um termo adicional que dá algumas indicações da ordem dos termos restantes. Geralmente, um polinômio puro é pedido, sem a ordem do termo para complicar. Uma das opções no comando *convert* do Maple permite que você extraia a o termo da ordem da série. O Exemplo 8-13 mostra como.

Exemplo 8-13

Ache a expansão de Taylor, com os termos até o 6º. grau, de

>ex813 := (x+2)/(x^2-1);

$$\text{ex813} := \frac{x+2}{x^2-1}$$

em torno de $x = -2$ e expresse como um polinômio puro.

Resolução:

>t813 := taylor(ex813, x = -2, 7);

$$\begin{aligned} \text{t813} := & \frac{1}{3}(x+2) + \frac{4}{9}(x+2)^2 + \frac{13}{27}(x+2)^3 + \frac{40}{81}(x+2)^4 + \\ & \frac{121}{243}(x+2)^5 + \frac{364}{729}(x+2)^6 + O((x+2)^7) \end{aligned}$$

Nós usamos o número 7 no comando Taylor porque queremos que o termo de ordem (termo O) seja pelo menos um a mais que o grau que maior termo pedido no polinômio. Agora converta t813 para um polinômio puro:

>t813a := convert(t813, polynom);

$$\text{t813a} := \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}(x+2)^2 + \frac{13}{27}(x+2)^3 + \frac{40}{81}(x+2)^4 + \frac{121}{243}(x+2)^5 + \frac{364}{729}(x+2)^6$$

A única diferença nas duas ultimas respostas do Maple é a ausência do termo de ordem na ultima expressão, t813a. Por questão de interesse, você pode converter t813a em uma

função se quiser. Este é um caso de “verbo irregular” no Maple, por que o comando não é, `convert(t813a, function)`, ao invés é

>t813b := unapply(t813a, x);

$$t813b := x \rightarrow \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}(x+2)^2 + \frac{13}{27}(x+2)^3 + \frac{40}{81}(x+2)^4 + \frac{121}{243}(x+2)^5 + \frac{364}{729}(x+2)^6$$

O comando `unapply` é usado para converter uma expressão (como t813a) em uma função (como t813b).

Sua vez. Como você transforma uma *função* em uma *expressão*? Se

>f813yt := x->1/(1-x);

dê o comando que produz a expressão $1/(1-x)$ da função cujo nome é `f813yt`.

Resposta: _____

Exercícios de Papel e Lápis

PP8-1

Compute os limites das seguintes seqüências se eles existirem. Caso contrário, descreva seu comportamento quando oscilam, ou divergem, para $+\infty$ ou $-\infty$.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{2n-7}$

Resposta: _____

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Resposta: _____

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

Resposta: _____

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=1}^n r^x}{n^{x+1}}$

Resposta: _____

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n+1}$$

Resposta: _____

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^n + (-1)^n / n}{a^{n-1} + (-1)^{n+1} / (n+1)}$$

Resposta: _____

$$(g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{n}$$

Resposta: _____

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\sqrt{nx})$$

Resposta: _____

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x / \sqrt{n})}{n}$$

Resposta: _____

$$(j) \lim_{x \rightarrow \infty} na^n, |a| < 1$$

Resposta: _____

Maple Lab

ML8-1

Examine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ para determinar se converge ou não a um valor finito. Tente os seguintes comandos do Maple.

(a):

>S := k->Sum (((n*(n+1))^-1), n = 1 .. k); Resposta: _____

(b):

>Sk := value(S(k)); Resposta: _____

(c):

>limit(Sk, k = infinity); Resposta: _____

ML8-2

Ache o valor da série infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Resposta: _____

ML8-3

Mesmo a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sendo divergente, você pode avaliar as somas parciais.

Plote o comportamento da série da seguinte forma:

```
>Sn := Sum(1/r, r = 1 .. n);
>plot([seq([n, sum(1/r, r = 1 .. n)], n = 1 .. 20)], style = point);
```

O plot mostra uma função divergente? Se você tiver dificuldade em decidir, tente mais pontos. Qual a sua conclusão? Escreva uma explicação detalhada de como chegou à sua decisão.

Resposta: _____

ML8-4

Considere o problema de encontrar a aproximação para $n!$. Quando n se torna muito grande. É bem obvio que se x tem X dígitos antes da casa decimal, a função x^x tem cerca de nX dígitos. Similarmente o número e^x tem aproximadamente o mesmo número de dígitos que 10^x , então mais uma vez, o número de dígitos é até que fácil de contar. O número $e^{1.000.000}$ tem cerca de 4.000.000 de casas decimais já que $e^{1.000.000} \cong 10^{434.294}$. Quantos dígitos tem o número $(10^6)!$? Para estimar o número de dígitos faça o seguinte.

(a)Tente reduzir $n!$ a um número trabalhável tirando o seu logaritmo, e então expresse $\ln(n!)$ como uma série.

Resposta: _____

(b)Aproxime esta série como uma integral. Quais são os limites de integração?

Resposta: _____

(c) Realize a integração. Neste momento você já deveria ter uma estimativa para $\ln(n!)$. Do que nós já falamos a respeito do número de dígitos em e^x , $\ln(n!)$ é uma estimativa do número de dígitos em $n!$. Quantos dígitos tem $100!$ De acordo com a estimativa?

Resposta: _____

ML8-5

Algumas séries têm um padrão em seus coeficientes que é fácil de descrever. Por exemplo, o padrão dos coeficientes nas expansões da série de e^x é apenas $1/n!$ Use o Maple para achar o padrão dos coeficientes na expansão $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Resposta: _____

ML8-6

Use o Maple para achar o limite, quando $n \rightarrow \infty$ das seqüências a_n , cujos termos gerais são dados abaixo:

(a) $\frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}}$

Resposta: _____

(b) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

Resposta: _____

(c) $n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Resposta: _____

(d) $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}$

Resposta: _____

(e) $n \cos\left(\frac{np}{2}\right)$

Resposta: _____

ML8-7: Valor Presente

O valor presente de uma nota promissória para \$100 que vence um ano apartir de agora está valendo $\frac{100}{1+i}$, com i sendo a taxa de juros no dinheiro investido. A razão da nota valer menos de \$100 hoje é que você poderia investir $\frac{100}{1+i}$, numa caderneta de poupança e valeria \$100 em um ano, quando o banco adiciona os juros acumulados ao seu deposito.

Logo, o dinheiro que é seu com a data do pagamento no futuro vale menos do que o valor aparente da nota hoje.

(a) Digamos que tenha uma nota de cada amigo de confiança, que prometem paga-lo \$100 em dez anos. A taxa de juros é 7%, computados anualmente. Qual o valor presente da sua nota?

Resposta: _____

(b) Os pagamentos que você deve a alguém funcionam da mesma forma. Se você é cobrado \$1000 por mês do aluguel de seu apartamento, quanto você deve oferecer para pagar a vista de forma que você não tenha que pagar o aluguel durante um ano? Admita os juros sendo computado mensalmente e a taxa é de 1%.

Dica: O seu primeiro pagamento vence daqui a um mês, logo seu valor presente é $\frac{1000}{1+0.01}$. O seu próximo pagamento vence daqui a dois meses, então o seu valor presente é $\frac{1000}{(1+0.01)^2}$, e assim por diante. Escreva uma fórmula para a soma usando o Maple.

Resposta: _____

(c) Digamos que você ganhe na loteria e você queira pagar o seu aluguel infinitamente, assim você pode morar neste apartamento sem se preocupar com aluguel. Qual deveria ser o valor do cheque para, digamos, juros constantes de 1% ao mês, computados mensalmente?

Resposta: _____

(d) O senhorio oferece para vender o lugar por \$80.000. É um preço justo?

Resposta: _____

ML8-8: Diferenciando uma Série de potência

Lembre-se de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, -1 < x < 1.$

(a) Use o Maple para encontrar a representação da série de potência de $\frac{1}{(1-x)^2}$.

Resposta: _____

(b)Diferencie $\frac{1}{1-x}$ em relação a x e diferencie sua expansão da série de potência termo por termo. Compare sua resposta com (a).

Resposta:_____

(c)Use o Maple para achar a representação da série de potência $\frac{1}{(1-x)^3}$. Compare isto com a derivada de (b).

Resposta:_____

(d)Qual hipótese você pode formular a sobre integrar termo por termo? Teste a sua hipótese integrando $\ln(1+x)$.

Resposta:_____

(e)Sem usar o Maple, qual é a soma $x+2x^2+3x^3+\dots$

Resposta:_____

ML8-9

No exemplo 811, “sua vez” você descobriu que a aproximação da série dada para $\ln(x)$ quando $x = 1$, o ponto em cerca do qual a expansão acontecerá. Demonstre que a expansão da série de qualquer função avaliada no ponto em cerca do qual a expansão acontece dá uma resposta exata.

Resposta:_____
